
Ecole de Goutelas

Exo-planètes: Exercices pratiques

Christian Boily
Thomas Keller
Jean-Yves Hangouet

mai 2005

TABLE DES MATIÈRES

I	Interaction entre proto-planète & disque gazeux	7
1	Hydrodynamique @ 2D : acclimatation	9
1.1	Le code hydro GASRUN	10
1.2	Mise en œuvre	10
2	Accrétion à la Bondi	15
2.1	Contexte	15
2.2	Conditions initiales : flux laminaire de gaz	16
3	Bras spiraux autour d'une planète	19
3.1	Le systme de coordonnées	19
3.2	Effet de la température	20
4	Disque gazeux autour d'une étoile	23
4.1	Conditions initiales et temps de relaxation	23
4.2	Le cas d'une étoile isolée	24
4.3	Disque autour d'une étoile double	25
4.3.1	Le temps de relaxation : perturbation	25
4.3.2	Résonances orbitales	26
4.4	Etoile simple + perturbation externe	26

4

II Les planétésimaux 27

5 Coagulation de cailloux et cœur massif des planètes 29

6 Anneaux de Saturne 31

III Les planètes et leur volution orbitale 33

7 Le code xorsa 35

8 Stabilité du système solaire 37

9 Effet de Kozai 39

Préface

Ce polycopié est un outil d'aide pour le programme d'exercices encadré par C. Boily, T. Keller et J.-Y. Hangouet dans le cadre de l'école thématique de Goutelas édition 2005. Il contient seulement quelques suggestions de travaux pratiques et exercices qui amèneront les participants à s'interroger sur la manière d'aborder le problème de la formation et le devenir de planètes au moyen de calcul numériques. L'objectif ici est de semer le doute, plutôt que d'adopter l'approche habituelle de fournir les réponses détaillées aux questions posées.

Christian Boily <cmb@astro.u-strasbg.fr>
19 mai 2005, Strasbourg

Première partie

**Interaction entre proto-planète &
disque gazeux**

CHAPITRE

1

Hydrodynamique @ 2D : acclimatation

La notion de disque en astrophysique nous suggère d'étudier le comportement de mouvements limités à deux degrés de liberté. Nous parlerons du plan (x, y) confinant ces mouvements. Ceci permet de simplifier les équations du mouvement et leur représentation dans l'espace. Par contre, les détails de ce qu'on observe en 2D ne sont souvent qu'indicatif de ce qui sera observé dans une étude à trois dimensions spatiales.

Par exemple pour le cas d'un gaz, une surdensité (locale) découle d'un travail mécanique

$$\delta E \propto P \delta \Sigma \quad (1.1)$$

où Σ est la densité de surface, P la pression et E l'énergie. En 3D, ce travail mécanique pourrait être investi dans un mouvement le long de l'axe z pour donner selon

$$\delta E \propto G \Sigma \delta z \quad (1.2)$$

un déplacement vertical de δz , sans augmentation de la densité.

Ces remarques mettent un bémol sur les conclusions que nous pourrions tirer de ces exercices. Toutefois le gain en temps de calcul, comparé à un calcul de

résolution équivalente à 3D, est de l'ordre de N , (si N est le nombre de point d'une grille découpant l'espace) ce qui nous permettra de progresser rapidement (nous ne disposons que de quelques heures après tout).

1.1 Le code hydro GASRUN

Le programme que nous allons utiliser à été développé par D. van Albada de l'université d'Amsterdam. Il n'est pas du domaine public et donc vous n'aurez pas accès aux sources. Il est rédigé en FORTRAN ce qui rend son utilisation un peu pénible (voir plus bas).

Ce programme toutefois est très stable et est une implémentation astucieuse de la méthode de résolution par flux alterné (*flux splitting scheme*). L'idée consiste à résoudre les équations du mouvement tour à tour dans la direction x , puis la direction y . En intégrant pour un intervalle de temps désiré δt , l'algorithme divise en sous-intervalles non-égaux mais commensurables pour les composantes x et y des équations (coordonnées cartésiennes par défaut). Ceci permet une mise à jour des quantités par auto-correction puisqu'elles sont modifiées à l'intérieur de l'intervalle δt (voir Fig. 1). Les équations du mouvement

(1.3)

sont exprimées sous forme de différences finies sur une grille cartésienne selon le schéma de Godunov (cité dans Press et al. 1992, Numerical Recipes, §19). Il conviendra d'admettre qu'il s'agit d'un schéma connu et stable, pouvant traiter de grands contrastes en densité (voire des chocs). Par contre le champ de force est imposé et le gaz répond ce champ jusqu'à converger vers une solution d'équilibre. L'auto-gravité du gaz est totalement ignorée (équation de Poisson non respectée).

1.2 Mise en œuvre

Le programme admet un certains nombre de paramètres dont les plus importants sont la résolutions linéaire de la grille de calcul, la vitesse du son du gaz, et des paramètres de contrôles : nombre de pas de temps, temps alloué pour le calcul, sauvegarde de configurations intermédiaires, etc ..

Le programme est évoque comme n'importe quelle commande Unix,

```
./GASRUN.X < INPUTFILE >& LOGFILE &
```

où INPUTFILE est un fichier ascii de paramètres : chaque ligne du fichier est importante car elle est lue par le programme. Par contre tous les chiffres 9999.. etc, n'ont pas à être modifiés :

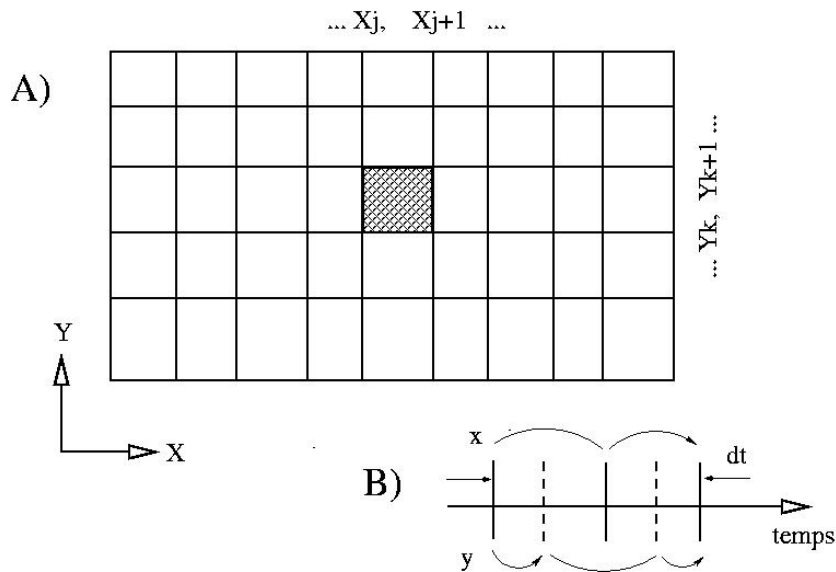


FIG. 1.1 – A) Grille cartésienne découpant l'espace, et B) le schéma intégration des équations du mouvement met à jour les composantes x, y en alternance, soit deux sauts de $\delta t/2$ en x , et $\delta t/4, \delta t/2, \delta t/4$ en y .

```

1)  900 14.3  50  1  -1
2)  0 9000  999.9
3)  10  25  999.9  999.99
4)  10 300  999.9  999.99
5)  1  500  999.9  999.99
    99999 9999 999.9  999.99
6)  2  1.E-3  0.5  0.5  0.00001
7)  100 100  0.002  0.002
8)  Planetary wake, planet = 1.6E-4 star = 1. S = 3. AU, cs = 1 km/sec
    growth = 0.2 Yrs
9)  1.  0.0  0.0
10) 1  4  4  1  1  0.4  0.4  0.4  0.4
11) 1.6E-4  1.  3.E0  2.E-3  5.0  0.2  0.00
12) 1
13) Goutelas project started 15/05/2005
14) 0.001  0.001
15) 0.000

```

Ligne par ligne : les indications en **rouge** sont celles à modifier

- 1 - temps de calcul en minutes, secondes.
- 2- pas de référence (0), nombre de pas à effectuer (9000)
- 3- nombre de pas entre chaque sauvegarde (10), à partir de .. (25) fichier fort.10
- 4- comme (3), mais au fichier fort.11
- 5- imprime les champs de densité et célérité chaque 500 pas
- 6- pas de temps initial (1E-3) facteurs de sécurité, plus petite valeur de densité admise (0.00001)
- 7- nombre de mailles, (100, 100) et dimensions de la grille (en x,y), 0.002
- 8- identifiant de la simulation
- 9- Vitesse du son (1.)
- 10- conditions frontières : grille cartésienne (1), périodique en x (4, 4), fixe en y (1,1)
- 11- Paramètres spécifiques au problème traité (ici, planète-gaz)
- 12-
- 13- Commentaire ajouté au fichier de sorties.
- 14-
- 15- Fraction de la masse du gaz changeant dans le temps (0 !)

Quelques remarques : le nombre de mailles doit demeurer inférieur à 1000 (ligne 7) ; la vitesse du son est donné en km/s (ligne 9) ; les sauvegarde au fichier fort.10 sont cumulatives, donc toute la séquence de 10 pas d'intervalle (ici) est sauvegarder, une valeur > 10 est recommandée en fonction de la fréquence de la séquence de densité et vitesse imprimée en format ascii.

Lorsque le code a terminé, on peut vouloir relancer le programme pour poursuivre jusqu'à un nombre de pas supérieur. Pour se faire, relancez le programme mais en subsituant pour le fichier de tout à l'heure un fichier RESTART qui aura l'allure suivante :

- 1) 900 14.3 50 1 -1
- 2) 4000 2000 999.9
- 3) 10 500 999.9 999.99
- 4) 10 300 999.9 999.99
- 5) 1 500 999.9 999.99
- 6) 99999 9999 999.9 999.99
- 7) 2 1.E-3 0.5 0.5 0.00001
- 8) 0
- 9) 1
- 10) Continuation - sans changer la grille
- 11) 0.001 0.001
- 12) 0.000

Il n'y a maintenant que deux lignes importantes : ligne 2, à partir de quel pas de temps on désire poursuivre le problème (sauvegardé dans fort.10) et combien de pas de temps supplémentaires on désire effectuer à partir de ce repère (ici, 4000 et 2000, respectivement) ; ligne 10, un commentaire vous permettant de mieux vous y retrouver, ce commentaire apparaîtra dans le fichier de sorties.

Nous allons étudier deux catégories de problèmes, l'une faisant référence à l'impact d'une planète sur une couche gazeuse, l'autre, à l'impact des étoiles sur un disque gazeux. Pour chaque cas nous aurons à modifier la ligne 11 du fichier INPUTFILE pour adapter les paramètres à la nouvelle situation :

1. Cas des planètes. La ligne 11 se lit alors

```
M M* S Mp Sp Tgr Mach
```

où M est la masse de la planète (en masse SOLAIRE), M^* la masse de l'étoile autour de laquelle tourne la planète, S son orbite (en UA), M_p , S_p une planète extérieure (perturbation), T_{gr} le temps de croissance (en années) de la planète et de la perturbation (pour un démarrage calme), $Mach$ est le flot de gaz dans un repère inertiel fixé à la planète.

2. Cas des étoiles + disque. La ligne 11 se lit alors

```
M1 M S Mp Sp Tgr Angle
```

où cette fois M_1 est la masse de l'étoile primaire, $M = M_1 + M_2$ la masse de l'étoile double, M_p , S_p : masse et distance d'un corps extérieur en rotation relativement au baricentre de l'étoile double, T_{gr} est le taux de croissance de l'étoile double, et $Angle$, l'orientation de l'étoile double dans un repère en co-rotation (orbite circulaire).

Résumons-nous : les unités de calcul sont l'unité astronomique (UA) pour les longueurs, la masse du Soleil est l'unité de masse (donc $M_{Jupiter} \approx 1.6 \times 10^{-4}$ dans ces unités) et le temps se mesure en année. Toutefois, nous faisons bien la saisie de la vitesse du son en km/s : elle est transformée en unités de calcul par le programme et c'est cette valeur qui apparaît dans le fichier de sorties. C'est cette valeur que vous devez utiliser pour comprendre l'évolution de votre système.

Par la suite, nous allons nous attaquer à des problèmes spécifiques avec un exemple de calcul + paramètres utilisés lorsqu'approprié.

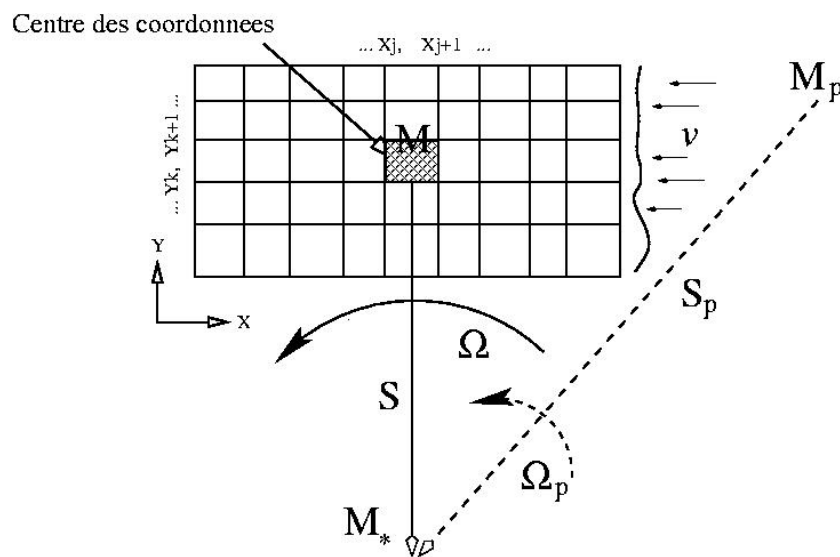


FIG. 1.2 – Référentiel et paramètres pour le cas des problèmes de planète plongées dans un environnement gazeux. $\Omega = \sqrt{GM_*/S^3}$ est la vitesse angulaire du repère tournant, les quantités indicées 'p' se réfèrent à une perturbations extérieures, $\nu = v/c_s$ est le nombre de Mach d'un flot de gaz entrant par la droite. Notez que la planète de masse M est située au centre des coordonnées.

CHAPITRE

2

Accrétion à la Bondi

2.1 Contexte

Hermann Bondi s'est intéressé à l'accrétion par un corps ponctuel immergé dans un milieu uniforme (de gaz). Ce milieu sert de réservoir et Bondi rechercha une solution stationnaire au taux d'accrétion par l'objet massif. Le résultat qu'il a obtenu est la relation

$$\frac{dM}{dt} = 2\pi \frac{(GM)^2}{(V^2 + c_s^2)^{3/2}} \Sigma \quad (2.1)$$

où M est la masse de l'objet (pour nous une planète), G la constante de gravitation, V la vitesse de la planète se déplaçant dans le gaz, c_s la vitesse du son de ce gaz, et Σ la densité (constante).

Cette relation donne un taux de croissance instantané de la planète par accrétion. Or le gaz tombant à la surface de la planète doit dissiper de l'énergie cinétique s'il doit s'agglutiner à sa surface. Dans nos simulations le gaz est isotherme et l'équation d'état d'un gaz parfait mène-t-à une augmentation constante de la pression quand le gaz est comprimé. Nous voulons savoir comment retrouver une solution stationnaire sans négocier les détails fin de l'accrétion en s'inspirant de la relation de Bondi.

2.2 Conditions initiales : flux laminaire de gaz

On observe que la partie droite de la relation de Bondi est une constante (presque) dans la mesure où dM/dt reste faible. Au départ nous imaginons un flot de gaz, de vitesse V , traversant la grille de droite à gauche. Vous pourrez reproduire cette situation en initialisant à zéro la masse de l'étoile autour de laquelle 'tournerait' la planète. Il suffit ensuite d'étudier le comportement du système lorsque vous faites croître la masse d'une planète sur un temps T_{grow} à choisir, c'est-à-dire que vous avez

$$\frac{dM}{dt} = \frac{M}{T_{grow}}$$

une constante. Vous pourrez ainsi étudier quelques cas importants :

1. comparez les cas où M/T_{grow} est supérieur/inférieur à la valeur obtenue (par vous) pour la relation de Bondi.
2. Que se passe-t-il lorsque le temps écoulé exède T_{grow} ? Pourquoi ?
3. Le code permet de changer les conditions aux frontières : fixes, périodiques, etc. Comment pourriez-vous déterminer le temps de calcul raisonnable en fonction des paramètres choisis pour votre grille de calcul ?

La figure 1.2 montre les résultats obtenus pour les paramètres suivants :

```

900 14.3 50 1 -1
0 300 999.9
10 25 999.9 999.99
10 300 999.9 999.99
1 10 999.9 999.99
99999 9999 999.9 999.99
2 1.E-3 0.5 0.5 0.00001
200 100 0.002 0.002
Planetary wake, planet = 1.6E-4 star = 0. S = 3. AU, cs = 2 km/sec
2. 0.0 0.0
1 4 4 4 4 0.4 0.4 0.4 0.4
1.6E-4 0. 3.E0 0.E-3 5.0 10.0 1.00
1
Goutelas project started 15/05/2005
0.001 0.001
0.000

```



FIG. 2.1 – Accrétion à la Bondi et compagnie. Cadre du haut : profil de densité, en bas la célérité (foncé pour les faibles vitesses). On reconnaît la trainée prédite par Hoyle et Lyttleton. Les paramètres utilisés avait $M = 1.6 \times 10^{-4}$, nombre de Mach = 1, vitesse du son = 2 km/s, et $T_{grow} = 10$. Le résultat est montré après 500 pas de temps ($t \approx 0.5$ ans).

CHAPITRE

3

Bras spiraux autour d'une planète

Il est clair que les planètes géantes sont associées à un disque (gazeux) en quasi-équilibre autour d'une jeune étoile. Le problème de Bondi doit être modifié pour tenir compte de cette réalité et voir quel serait l'impact de la planète sur la structure du disque.

3.1 Le système de coordonnées

Le disque et la planète tournent autour de l'étoile dans le régime képlérien. Nous négligeons totalement l'auto-gravité du gaz. La courbe de rotation est donc de la forme

$$v_c(R) = \Omega_z R = \sqrt{GM_*/R^3} R$$

si Ω est la rotation angulaire alignée avec l'axe z et R le rayon cylindrique relativement à la position de l'étoile (Fig. 1.2). Nous imaginons au départ un disque gazeux uniforme mais dont le champ de vitesse est purement azimuthal.

Le grand arc de compression que nous voyons apparaître dans le problème d'accrétion de Bondi est symétrique p/r à l'objet accrétant et l'arc va dans le sens de la vitesse du gaz p/r à cet objet. Si on se place dans le repère tournant de

la planète, le champ de vitesse devient (approximativement au premier ordre de déplacement en y)

$$v_c(R)' = -\delta y (\partial(R\Omega_z(R))/\partial R)$$

donc la vitesse est positive ou négative selon le déplacement en y . On peut donc s'attendre à deux arcs se développant autour de la planète dans le sens opposé, en forme de 'S'.

Reprenez le fichier de paramètre du problème précédant et adaptez-le à cette nouvelle configuration. Par exemple on peut imaginer une étoile de type solaire, une distance étoile-planète de ~ 5 UA, par contre le flot est maintenant nul (Mach = 0). Qu'observez-vous ? Comparez les deux champs des vitesses et déduisez-en des valeurs pertinentes de dimensions de la grille, de la distance à l'étoile, pour retrouver un effet aussi fort que possible. Vos conditions aux frontières sont-elles cohérentes avec le problème posé ? Dans quelle mesure cela explique-t-il le comportement de départ ?

3.2 Effet de la température

Vous êtes invités à varier la température du gaz afin de vérifier que celle-ci a un impact sensible sur l'évolution du système. Quelle contrainte apporter au temps de calcul en fonction des paramètres du problème ?

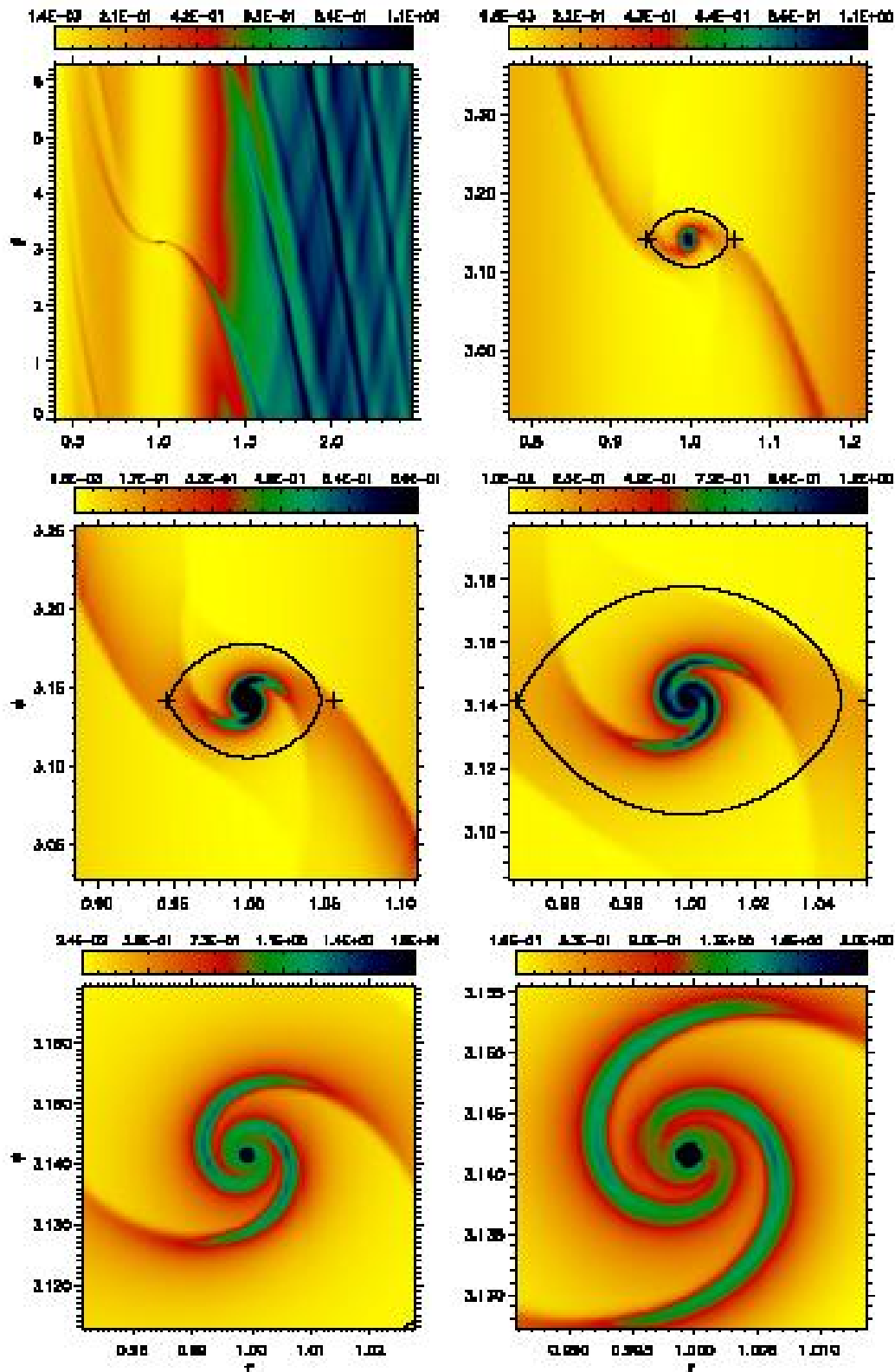


FIG. 3.1 – Simulation multi-grid de l'accrétion d'une planète en révolution autour d'un soleil. Le temps de calcul correspond à 210 révolutions. Les cartes de densités montrent différents niveaux de zonage. Notez les coordonnées cylindriques. Le trait plein représente le volume de Roche. Tirée de D'Angelo et al. 2002, A&A.

CHAPITRE

4

Disque gazeux autour d'une étoile

Le problème précédant laissait entendre que les effets de bords sont important lorsque l'on travail avec un champ des vitesses différentiel ($\Omega \rightarrow \Omega(R)$). La période initiale d'évolution est violente, du fait de notre choix de conditions initiales (densité uniforme, faible température). La même situation se présente lorsque l'on traite d'un disque complet autour d'une étoile. Si celle-ci est substitué par un point, source de gravité, nous pouvons nous espérer des effets très violent au centre des coordonnées (où réside l'étoile, voir Fig. 4.1).

4.1 Conditions initiales et temps de relaxation

Le cas d'un disque uniforme en équilibre autour de l'étoile est particulièrement difficile à réaliser : il y a divergence de la force gravitationnelle à faibles distances. Le pas de temps requis pour mener à une bonne intégration est infinitésimal et il faut recourir à une forme de lissage pour résoudre. Or nous ne voulons pas perdre la résolution spatiale de la grille : il convient alors de limiter ce lissage à une seule case de la grille. Tout de même, le champ de force peut être très grand ce qui mène à des instabilités et des erreurs de calcul (crash).

Pour simplifier les choses, il a été convenu de lancer le programme en imposant non plus une densité uniforme au départ, mais un profil de densité montrant

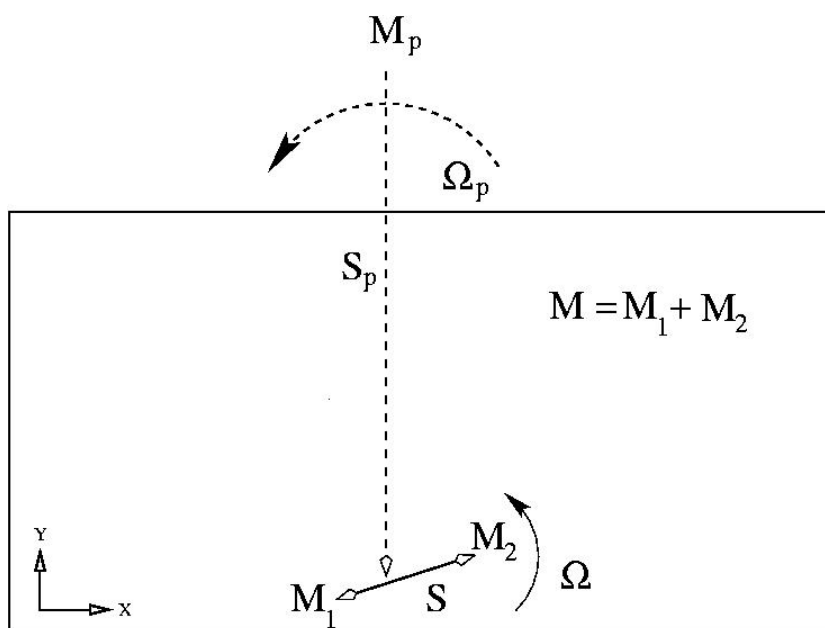


FIG. 4.1 – Référentiel et paramètres pour le cas des problèmes de gaz évoluant dans le référentiel (tournant) d'une étoile double. $\Omega = \sqrt{GM/S^3}$ est la vitesse angulaire de la binaire, les quantités indicées 'p' se réfèrent comme avant à une perturbations extérieures. Notez que le baricentre de la binaire est située au centre des coordonnées.

un trou au centre (autour de l'étoile). Cette configuration donne lieu à un gradient de pression vers le centre, le gaz va donc rapidement couler vers le centre, et une configuration cohérente avec la grille et paramètre de simulation va se mettre en place toute seule.

Il faut donc, dans un premier temps, lancer le programme (il s'appellera maintenant binaires.x) avec un fichier de paramètre approprié (voir §1). Un exemple de fichier vous sera fourni.

4.2 Le cas d'une étoile isolée

Il est trivial d'admettre qu'un disque gazeux en équilibre autour d'une étoile doit préserver la symétrie du potentiel. Il ne devrait donc pas y avoir de structure présente dans le disque, mis à part une dépendance radiale de la pression et des vitesses. Est-ce que cela demeure vrai pour toute température (vitesse du son) non-nulle ? Faites qq tests en variant c_s .

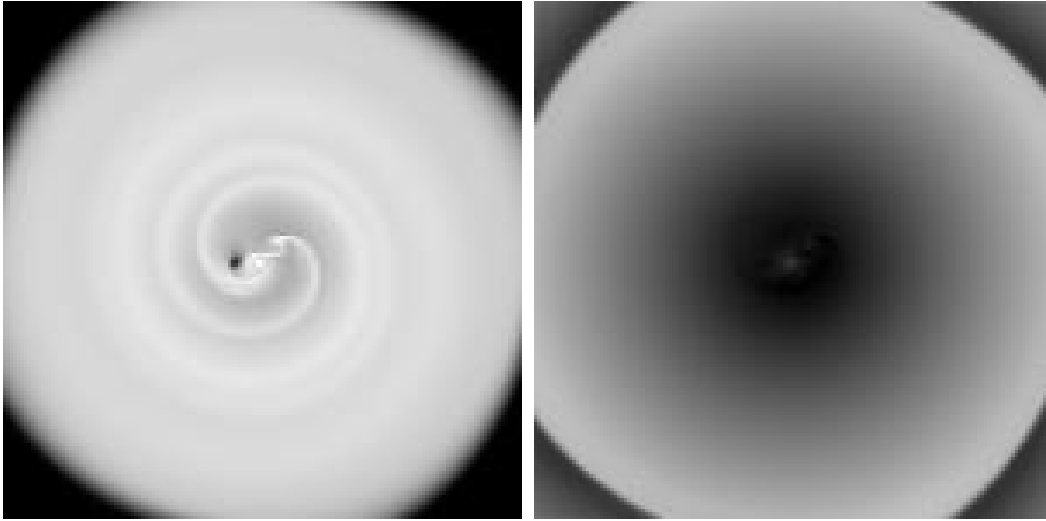


FIG. 4.2 – Formation de bras spiraux autour d’une étoile binaire ($M_1 = 1, M_2 = 0.2$) après 7000 pas de temps d’évolution ($t \approx 6.2$ unités de temps). Une vitesse de son de $c_s \approx 10 \text{ km/sec}$ a été employée. Partie de gauche : carte de densité ; à droite la célérité du gaz.

4.3 Disque autour d’une étoile double

Ayant obtenu une configuration optimale pour construire un disque axisymétrique, nous allons maintenant perturber ce disque au moyen de 1) un potentiel barré, celui d’une étoile binaire, 2) d’une étoile gravitant autour du disque, soit une perturbation extérieure au disque. L’idée est de vérifier si nous pouvons facilement distinguer entre les deux situations, en termes de leur impact sur le disque.

4.3.1 Le temps de relaxation : perturbation

Vous pourrez relancer le programme `binaire.x` mais cette fois en imposant

$$M = M_1 + M_2 > M_1$$

comme paramètre d’entrée. La composante non-radiale du champ de force de la binaire va croître pendant un temps T_{grow} , la composante radiale étant toujours présente. Choisir T_{grow} en fonction des résultats obtenus pour le cas de l’étoile simple.

Vous pourrez faire tourner plusieurs fois cette configuration en changeant par exemple la vitesse de son, la résolution numérique, le rapport M_2/M_1 , etc. Que

se pass-t-il lorsque vous imposez $c_s \rightarrow 0$? Les résultats obtenus sont-ils réalistes (ou du moins jolis) ? Il serait intéressant d'interpréter vos résultats en termes des paramètres de Jeans, longueur et masse :

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi c_s^2}{G\Sigma}, \quad M_J = \frac{\pi}{6} \Sigma \lambda_J^3 \quad (4.1)$$

4.3.2 Résonances orbitales

Observez les cartes de célérité du gaz après et identifiez les zones de faibles vitesses (noir = nulle). Vous devriez découvrir une correspondance étroite avec les surdensités observées sur les cartes de densité. Comment interprétez-vs cela ?

4.4 Etoile simple + perturbation externe

On reprendra l'exercice précédant mais cette fois en imposant $M_1 = M (= 1)$, et en ajoutant une perturbation extérieure (donc à un rayon qui lui permet d'éviter le disque gazeux. Les deux paramètres importants sont ici M_p et S_p et bien sûr vous devrez imposer $S_p > Ny \times \delta y / \sqrt{2}$. L'étoile extérieure est sur une orbite circulaire autour du centre des coordonnées.

La perturbation sera plus forte sur les couches extérieures du disque, mais elles se propageront vers l'intérieur. Certaines parties du disque peuvent avoir une période de révolution p_g dans un rapport rationnel avec la période orbitale de l'étoile extérieure, soit

$$\frac{p_g}{p_p} = \frac{m}{n}, \quad m > n$$

où m et n sont deux nombres premiers positifs. Pouvez-vous identifier les orbites près de ces résonances ? Le gaz est-il uniformément distribué en ces points ?

Deuxième partie
Les planétésimaux

CHAPITRE

5

Coagulation de cailloux et cœur massif
des planètes

CHAPITRE

6

Anneaux de Saturne

Il est prévu d'effectuer 16 hrs de TD + 10 hrs de TP (minimum de 5 TP).

Troisième partie

Les planètes et leur volution orbitale

CHAPITRE

7

Le code xorsa

CHAPITRE

8

Stabilité du système solaire

CHAPITRE

9

Effet de Kozai